

Сфера Ленарта. (стаття №7)

Пропозиція щодо включення сферичної геометрії до шкільної навчальної програми

(„Міжнародний” навчальний курс з математики для середніх шкіл)

Ми пропонуємо включити сферичну геометрію до навчальної програми з математики. Проаналізувавши широкий спектр навчальних програм з математики в різних країнах світу, ми обрали зміст, який належить майже до всіх. У таблиці нижче ми представляємо інший підхід до цього самого змісту, використовуючи сферичну геометрію для порівняння з традиційними евклідовими поняттями:

№	(звичайна) «шкільна» математика	Сферична геометрія	Проблемний підхід	Діяльність учнів
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
1	точки, пряма, відрізок	точки, пряма лінія, відрізок-на-сфері	1) Чи може щось бути «прямим» на вигнутій поверхні? 2) Який набір точок можна назвати “прямою” на кулі? Чому? 3) Скільки прямих можна провести через дві точки на площині та на сфері? 4) На скільки точок можуть ділитися дві прямі на площині та на кулі? 5) Скільки різних відрізків створюють дві точки на прямій на площині та на кулі?	Учні спостерігають за глобусом, роблять креслення та конструкції на площині, на кулі та роблять висновки – вирішують перелічені проблеми.
2	відстань (на площині)	відстань на сферичній поверхні	1) Чи можемо ми вимірювати відстань точок однаково на площині та на кулі?	Вправа: Відстань між точками, с. 22.
3	залежність між розміром одиниці та кількістю одиниць, необхідних для вимірювання довжини об’єкта	залежність між розміром одиниці та кількістю одиниць, необхідних для вимірювання довжини об’єкта на кулі	1) Які одиниці ми можемо використовувати для вимірювання відстані в площині? Які одиниці ми можемо використовувати для вимірювання відстані на кулі? 2) Можливо, трохи історії ...	Вправа: Вибір одиниці відстані, с. 23 Подорожі по глобусу, с. 109


№	(звичайна) «шкільна» математика	Сферична геометрія	Проблемний підхід	Діяльність учнів
4	відносні місця розташування та шляхи руху	відносні місця розташування та шляхи руху на сфері	1) Що означає "далеко"? Що означає "близько"? 2) Як оцінити взаємні розташування та рухи?	1) Подорожі по земній кулі, с. 109 2) Як далеко від вашого міста до ... ? 3) У якому напрямку потрібно повернути, щоб дістатися до ... ? с. 111
5	кола	кола на сфері	1) Скільки центрів має коло – те, що на площині, і те, що на кулі? 2) Чи можна намалювати найбільше коло – на площині, і на кулі? 3) Чи постійне співвідношення довжини периметра кола до довжини його діаметра – на площині, на кулі?	Вправа: кола, с. 24 Вправа: Точки полюса та екватори, с. 26
6	кути	кути на сфері	1) Які кути ми можемо знайти на кулі? 2) Чи можна вимірювати кути на площині та на кулі однаково?	Вправа: Що таке кут?, стор. 28
7	паралельні, перпендикулярні та лінії, що перетинаються	паралельні, перпендикулярні та пересічні лінії на сфері	1) Скільки спільних точок можуть мати дві прямі на площині? 2) ... а на сфері? 3) Як вони можуть перетинатися? 4) Який кут перетину?	Вправа: Паралельні смужки, с. 31 Вправа: Перпендикуляри, с. 31
8	багатокутники	багатокутники на сфері	Чи можемо ми знайти на сфері такий багатокутник, що не існує на площині?	Вправа: двокутник, с. 33

№	(звичайна) «шкільна» математика	Сферична геометрія	Проблемний підхід	Діяльність учнів
9	трикутники	сферичні трикутники	Чи мають сферичні трикутники ті ж самі властивості, що і трикутники на площині?	Вправа: Трикутник, с. 35 Вправа: Сума внутрішніх кутів у трикутнику, с. 37 Вправа: Фалес і Лексель, с. 55
10	кутові бісектриси та перпендикулярні бісектриси	кутові бісектриси та перпендикулярні бісектриси у сферичних трикутниках	Визначте перпендикулярні бісектриси, бісектриси кутів, висоти та медіани трикутника на площині. Чи можемо ми застосувати ці визначення у сферичному трикутнику?	Вправа: Супутні лінії в трикутнику, с. 51
11	відносини між конгруентними фігурами на площині	відносини між конгруентними фігурами на сфері	Скільки даних потрібно, щоб показати, що два багатокутники збігаються? Скільки даних потрібно, щоб показати, що два трикутники збігаються на площині та на кулі?	Вправа: Конгруентність трикутників, с. 38
12	чотирикутники на площині	чотирикутники на сфері	На площині є кілька типів чотирикутників. Чи можемо ми визначити відповідні типи чотирикутників на сфері?	Вправа: Чотирикутники або чотиристоронні фігури, с. 40
13	облицювання на площині	облицювання на сфері	Мозаїки на поверхнях складаються з повторюваних візерунків геометричних фігур, що мають однакову форму і міру. Спробуйте створити кілька мозаїк на площині та на кулі. Що відрізняється у вашій роботі над складанням мозаїки на площині та на сфері?	Учні роблять експерименти та представляють результати своєї роботи.

№	(звичайна) «шкільна» математика	Сферична геометрія	Проблемний підхід	Діяльність учнів
14	Знаходження (вимірювання) площі плоских фігур	Знаходження (вимірювання) площі фігур на кулі	Як можна виміряти площину площинних областей? Що таке одиниця виміру? Як виміряти площу багатокутників? Як виміряти площу кіл? Як можна виміряти площу сферичних областей? Що таке одиниця виміру? Як виміряти площу багатокутників? Як виміряти площу кіл?	Вправа: Оцініть площу регіонів на площині та кулі, стор.42 Вправа: вимірювальна площа, с. 43 Вправа: Вимірювальна площа сферичних трикутників, с. 45 Вправа: Вимірювальна площа кіл, с. 47
15	відносини Піфагора на площині	відносини Піфагора на сфері	Чи справедлива теорема Піфагора на сфері?	Теорема Піфагора на сфері, с.107

**Приклад співвідношення між Математикою та Природознавством (Computer Science)
щодо сферичної геометрії у 4-6 класах на основі Польської навчальної програми**

№	Учень на Математиці	Учень на Природознавстві	Учень на сферичній геометрії	Приклад вправи або результат діяльності (активності) учнів
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
1	Розпізнає та називає фігури: точка, пряма, промінь, відрізок на площині.	Позначає на земній кулі: точки полюса, екватор, меридіан Грінвіч та меридіан 180 °, описує процес найбільших експедицій, особливо Крістофера Колумба та Фердинанда Магеллана.	Розпізнає та називає фігури: точка, пряма, промінь, відрізок на сфері; обговорюється проблема прямої лінії на сфері («сферична пряма лінія»).	
2	Розпізнає паралельні та перпендикулярні відрізки та прямі; малює паралельні та перпендикулярні відрізки на площині.	Позначає на земній кулі: точки полюса, екватор, меридіан Грінвіч і 180 ° меридіан.	Розпізнає перпендикулярні відрізки та прямі; малює на кулі перпендикулярні відрізки та прямі лінії; досліджує проблему паралелізму (паралельності) на сфері, формулює висновок про відсутність паралельних відрізків і прямих на сфері.	На площині ми можемо встановити відстань між двома паралельними прямими. Побудуйте найбільше коло на сфері та фігурі, розташованих на постійній відстані від цього кола. Опишіть отриману вами фігуру. Чи ця фігура сферична пряма?

№	Учень на Математиці	Учень на Природознавстві	Учень на сферичній геометрії	Приклад вправи або результат діяльності (активності) учнів
3	Вимірює довжину відрізка на площині.	Описує маршрути найбільших експедицій, особливо Крістофера Колумба та Фердинанда Магеллана.	Вимірювання відстані між двома точками на сфері враховує задачу одиниць виміру, якщо вимірюється відстань на кулі.	<p>1) У стародавні часи вавілоняни з'ясували, що $\frac{1}{360}$ частини кола зручно вважати сферичною одиницею довжини (дивіться в різних джерелах для відповіді на питання: чому?) Це загальновідоме значення 1 градуса. Таким чином, ви можете використовувати сферичну лінійку і вимірювати відстані на кулі в градусах.</p> <p>2) Знайдіть такі дві точки на сфері, що відстань між ними можна виміряти вздовж більше однієї дуги. Чи існують на площині такі дві точки, що відстань між ними можна виміряти вздовж більш ніж одного відрізка?</p> <p>3) Яка найкоротша відстань між двома точками на площині? Яка найкоротша відстань між двома точками на сфері?</p>
4	Малює кут, величина якого є менше 180° ; вимірює кути величиною менше 180° з точністю в 1 градус; порівнює кути.	Вказує основні напрямки на земній кулі.	Побудовує, вимірює та порівнює кути на сфері.	<p>Подивіться на малюнок нижче:</p>  <p>Рис.: Глобус, зроблений учнем (Джерело: картина, зроблена Ганною Рибак)</p> <p>На ній зображений дуже простий земний шар, зроблений студентом. Які важливі елементи земної кулі ви бачите тут? Які кути ви бачите? На малюнку ви бачите орієнтовне розташування Кракова та Лондона. Який кут між екватором і лінією, що з'єднує ці два міста?</p>

№	Учень на Математиці	Учень на Природознавстві	Учень на сферичній геометрії	Приклад вправи або результат діяльності (активності) учнів
5	Розпізнає прості призми, піраміди, циліндри, конуси та сфери в різних практичних ситуаціях.	Описує форму Землі за допомогою її моделі - земної кулі; представлено циркулюючий і обертовий рух Землі за допомогою моделі.	Розглядає, як об'єкти з навколишнього середовища можуть бути використані для дослідження властивостей фігур на сфері; робить прості експерименти з фруктами, кульками, повітряними кульками тощо.	
6	Обчислює периметр багатокутника із заданими довжинами сторін; обчислює площу квадрата, прямокутника, ромба, паралелограма, трикутника, трапеції, показаних або на малюнку, або в різних практичних ситуаціях.	Знаходить локацію (розташування) материків та океанів на Земній кулі.	Оцінює площі фігур на кулі, використовуючи земну кулю (райони островів, континенти тощо); розмірковує, як обчислити площі фігур на кулі.	<p>1) Поспостерігайте за земною кулею і спробуйте відповісти на запитання: «Яка площа більша: площа Гренландії чи Південної Америки, Канади чи Австралії? Яке відношення площі Світового океану до площі земель?»</p> <p>2) Континентальний шельф – це територія навколо материків, позначена на картах і глобусах світло-синім кольором. Моря та океани там відносно мілкі і є середовищем багатьох видів рослин і тварин. Як ви думаєте: яке відношення площі континентального шельфу до площі земель?</p> <p>3) Яке співвідношення площі пустель (позначених на мапах і глобусах жовтим кольором) до площі всіх земель? До площі покритих льодом поверхонь (позначених на мапах та глобусах білим кольором)?</p>

Приклад співвідношення сферичної геометрії та географії в молодшій (4-8 кл) школі

№	Учень на Географії	Учень на Сферичній Геометрії	Вправа чи ілюстрація результатів діяльності учнів
1	Описує основні характеристики форми та розміру Землі; визначає географічні координати на земній кулі.	За допомогою моделі створює власний глобус, потім використовує цей глобус у вирішенні певних проблем.	<p>Інструкції щодо виготовлення земної кулі Землі наведені в комплекті Lénárt Sphere.</p> <p style="text-align: center;">Розслідуйте:</p> <p>1) Позначте його місцезнаходження в географічній системі координат (GPS координати точки можна знайти в атласі чи Інтернеті). Визначте сферичну відстань у градусах між точкою та Північним полюсом за допомогою сферичної лінійки. Перетворює відстань від градуса до кілометра, якщо окружність Землі становить близько 40 000 км.</p> <p>2) З огляду на дві точки на одній широті, але не на екваторі, чи збігається дуга широти з найкоротшим шляхом між точками? Досліджує проблему на саморобній земній кулі. Виберіть два міста приблизно на одній широті, наприклад, Варшава та Іркутськ, Будапешт та Сіетл. Намалює найкоротшу лінію на кулі і вимірює сферичну відстань між містами лінійкою. Чи ця пряма буде паралельною Екватору?</p> <p>3) На Місяці географічна система координат може бути побудована так само, як і на Земній кулі. Розташування кратера Архімеда приблизно на довжині 0° і північній широті 30°; кратер Птолемея знаходиться на широті 0° і південній широті 30°. Яка відстань між ними в градусах і кілометрах? Довжина місячного екватора становить близько 11 000 км.</p>

№	Учень на Географії	Учень на Сферичній Геометрії	Вправа чи ілюстрація результатів діяльності учнів
2	Розуміє і пояснює обертання Землі, сонячний час, час зони, характеристики обертального руху; пояснює, чому були введені часові пояси та <i>date-line</i> ; використовує карту часових поясів для визначення різниці між часовими поясами та сонячним часом.	Використовує сферичну модель для ілюстрації часових поясів на Землі.	<p>Глобус часового поясу можна виготовити з саморобного глобуса Живої Землі за допомогою карти часового поясу в атласі.</p> <p>Дайте відповіді на запитання:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Чому часові пояси шириною 15°? 2) Як можна визначити різницю в часі між будь-якими двома точками на земній кулі? <p>Розслідуйте:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) Який час у вашому місті? Де в світі люди сплять в цей момент? Де вони снідають? 4) Який час у вашому місті, коли він опівдні а) у Вашингтоні? б) у Бангкоку? 5) Чи можливо, що рейс відправляється з Гонконгу в четвер і прибуде до Сан-Франциско в середу? 6) Що відбувається з датою та часом, коли ви перетинаєте <i>date-line</i>? Поясніть, для чого потрібен <i>date-line</i>.