Дистанційний курс «*Математика в Природі*»

Розділ 2_2. Тема: Особливі числа (комплексні та уявні числа)

У минулому розділі йшлося загалом про «звичайні» речі: про реальний Світ навколо нас, про реальні предмети (об'єкти) навколо нас, та про реальні числа, що допомагають нам підрахувати ата врахувати все, «що реальне». – Дивіться: «*реальні об'єкти* $\to$ *реальні числа*».

А у цьому розділі, як можна побачити з його назви, мова піде про щось особливе (невже нереальне щось ?!). Так і є: розповідь далі піде про те, що для неписьменної людини та новачку буде незвично, – про комплексні числа. Але автор не буде розповідати про «теорію і практику комплексних чисел», бо все це можна знайти у підручниках.

♦ Ключові терміни

1) ***Комплексне число*** – число, що складається з двох окремих частин – «дійсної» ($\mathrm{Re} \leftarrow$ *real part*) та «уявної» ($\mathrm{Im} \leftarrow$ *imaginary part*) частин, що об'єднаються знаком «+» : «*комплексне число*» $= \mathrm{Re} + \mathrm{Im}$. Тобто, комплексні числа – це числові комбінації з двох компонентів. І все, нічого складного!

2) ***Уявне число*** – число, квадрат якого є від'ємним числом. «Базове» уявне число – число $i = \sqrt{-1}$. Перевіряємо: $i^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. З визначенням збігається. А чому i? – Бо воно *imaginary*.

Фундаментальна теорема алгебри наголошує, що кожне поліноміальне рівняння на кшталт виразу $P_n(x) = 0$ із комплексними коефіцієнтами має *комплексний корінь*. Наприклад, поліноміальне рівняння $x^2 + 1 = 0$ *не має дійсних коренів*. Однак якщо допустити існування комплексних чисел, то таке рівняння має два корені: $x = 0 \pm i$.

♦ Передумови «виникнення» комплексних чисел, або історичні відомості *К.Ч*.

У 1850 р. до н.е. невідомий єгипетський математик написав на папірусі формулу для розрахунку обсягу (об'єму) усіченого конуса, який називається ***frustum***: $V = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$. Цікаво, що ця формула ідентична тій, що використовується сьогодні, але: для виведення та розв'язання цієї формули зазвичай вважається, що потрібна набагато прогресивніша Математика, ніж існувала на той час. У пізніші роки, приблизно у 62 році н.е., Герон Олександрійський[1] і далі досліджував це рівняння. У якийсь момент своїх розрахунків він, здається, навмисно пропустив той факт, що в прикладі, який він записав, йому довелося обчислити значення для квадратного кореня з від'ємного числа. Насправді, його рукопис показує, що від'ємне число було записане як додатне число, завдяки чому витяг квадратного кореня стало можливим завдяки математиці, яка існувала на той час. Герон практично не допускав помилок в інших своїх роботах; майже впевнено, що він навмисно вирішив не вирішувати цю проблему, можливо тому, що негативні числа для нього не мали значення, не кажучи вже про квадратний корінь таких чисел. Тож, будемо вважати, що Герон «упустив» історичну можливість «відкрити» квадратний корінь із від'ємного числа.

[1] Heron of Alexandria (ancient Egypt) (10-75 н.е.) – стародавній математик, фізик та інженер. – [Електронний ресурс:] https://interestingengineering.com/heron-the-industrial-engineer-long-before-the-industrial-age

© Чепок А.О. (https://orcid.org/0000-0002-7902-9652), 2020

Негативні числа неодноразово нагадували про себе протягом багатьох наступних століть, примушуючи математиків «ламати голову», тому що саме їх існування здавалось неприродним, тупиковим, парадоксальним. Наприклад, можна було б порахувати камінці, але як можна відлічити серед них «негативні» камені? Освічені люди тих часів не бачили сенсу розглядати число, що представляє величини, які були *меншими за ніщо*. А якщо продовжувати цю абсурдність далі, як тоді можна було робити математичні маніпуляції з таким числом? Або, точніше, як можна запропонувати «витягнути» квадратний корінь з від'ємного числа? Ці питання бентежили математиків понад 1000 років після рукопису Герона, що датований першим століттям н.е. Здебільшого математики просто такими числами не цікавились, тому вони намагалися знайти якийсь спосіб або уникнути, або ігнорувати будь-які операції з від'ємними числами.

Першим, хто зробив математично складні зусилля, щоб зрозуміти значення уявних коренів, був англієць Джон Уолліс (John Wallis, 1616-1703). Хоча Уолліс заслужив чудову репутацію в математиці, але його внесок у глибше розуміння того, що ж насправді означав квадратний корінь з (–1) на жаль, не був надзвичайно значним. Однак Уолліс зазначав, що від'ємні числа можуть мати фізичне значення – це просто числа, які лежать ліворуч від нуля серед ряду чисел (тобто у від'ємному напрямку числової лінії). Це пояснення, хоч і здавалося б сьогодні дріб'язковим, на той час було великим стрибком уперед, оскільки раніше це пояснення просто не розглядалось. Це також припускало, що, оскільки тепер можна візуалізувати від'ємні числа, можливо, їх квадратне «коріння» теж може існувати.

У цей час теж почали давати про себе знати деякі приклади проблем, що потребують уявних коренів. Наприклад, якщо одна людина, що рухається з постійною швидкістю, переслідує м'яч, що котиться вниз, не складно скласти рівняння, щоб з'ясувати, коли людина зловить м'яч. Однак, якщо людина рухається занадто повільно, щоб це зробити, це рівняння матиме уявний корінь, тобто корінь, виражений через арифметичну операцію $\sqrt{-1}$. У графіку таке рівняння може виглядати як парабола, яка не зовсім досягає осі $0X$. Оскільки коренями рівняння є ті значення, які роблять рівняння рівним нулю (тобто там, де графік перетинає вісь $0X$), таке рівняння не може мати реальних коренів і може бути вирішене лише за допомогою тільки уявних чисел.

♦ Чи справді існують комплексні числа?

Комплексні числа включають квадратний корінь з від'ємного, і більшості нематематиків важко визнати, що таке число має значення. На відміну від них, вони відчувають, що *реальні* числа мають очевидне та інтуїтивне значення. Який найкращий спосіб пояснити нематематику, що комплексні числа необхідні та значущі, так само, як і справжні числа?

Це не платонівське питання про реальність Математики або про те, чи абстракції настільки реальні, як фізичні сутності, а про спробу подолати прогалину в розумінні, яку багато людей відчувають, стикаючись із комплексними числами вперше. Формулювання, хоч і провокаційне, навмисно розроблене, щоб відповідати тому, як багато людей насправді задають це питання.

Уявні числа – це не якійсь провокаційний винахід, це глибокий і природний результат розширення нашої системи чисел. Уявні числа – це все, що пов'язано з виявленням чисел, які існують не в одному вимірі вздовж числової лінії, а в повному двовимірному просторі. Змога сприйняти це дає нам не тільки більш багату і повну Математику, але також відкриває неосяжну кількість дуже реальних, дуже відчутних проблем в науці і техніці.

Так, природні явища – це складна річ, а математичний опис складних речей теж буде доволі складним, але … і це можна збагнути! – Не святі ж горшки ліплять! А уявіть, як «легко» давалося пізнання тим, хто був у цій справі піонером, тобто проходив цей шлях першим. От почитайте, що про уявні числа писав французький математик та механік Оґюстен-Луї Коші (1789-1857):

© Чепок А.О. (https://orcid.org/0000-0002-7902-9652), 2020

«*In analysis, we call a symbolic expression any combination of symbols or algebraic signs which means nothing by itself but which one attributes a value different from the one it should naturally be [...] Similarly, we call symbolic equations those that, taken literally and interpreted according to conventions generally established, are inaccurate or have no meaning, but from which can be deduced accurate results, by changing and altering, according to fixed rules, the equations or symbols within [...] Among the symbolic expressions and equations whose theory is of considerable importance in analysis, one distinguishes especially those that have been called imaginary*. -- Augustin Louis Cauchy, Cours d'analyse,1821, S.7.1»

(переклад автора: «Під час аналізу ми називаємо символічним виразом будь-яку комбінацію символів або алгебраїчних знаків, яка сама по собі нічого не означає, але яка приписує значення, відмінне від того, яким воно, природно, повинно бути [...]. Подібним чином, ми називаємо символічними рівняннями ті, які, сприйняті буквально та інтерпретуються відповідно до загальноприйнятих теорій, є неточними або не мають певного значення, але з яких можна вивести точні результати, всіляко змінюючи згідно з фіксованими правилами, рівняння або символи в межах [...]. Серед символічних виразів та рівнянь, чия теорія має значне значення в аналізі, особливо виділяють ті, які були названі уявними. – Огюстен Луї Коші, Cours d'analyse[2], 1821, S.7.1»

♦ Використання комплексних чисел

Жодне число не «існує насправді» так, як існують дерева або атоми. Однак у техніці та технологіях («*know how*») люди знайшли застосування для комплексних чисел так само, як і для дійсних чисел.

Комплексні числа використовуються у такому розділі математики, як *функції комплексних змінних*. Такі функції часто в змозі описувати природні ситуації (феномени), особливо там, де з'являються так звані *фізичні поля*[3], чого реальні функції зробити не здатні! До речі, саме звідси – з цих вельми «нестерпних» та «до біса заплутаних» теорій – або з розуму працьовитих геніїв «зробили крок» у цивілізований Світ такі вже звичні та бажані «чудеса», як всілякі лазерні пристрої, мобільний зв'язок та смартфони, IoT, 3D Virtual Reality Glasses, точні локальні прогнози погоди, літаки та дрони (від іграшок до бойових), сучасні авто з «*shaped by wind*»-кузовом, кристально чисті звук та зображення на дисплеях, засоби ведення сучасної розвідки та радіоелектронної боротьби (РЕБ), *stealth*-технології, гіперзвукова зброя, сонячна енергетика 3-ї генерації, … Повірте, перелік таких тем та напрямків буде дуже довгий!

[2] Bradley R.E., Sandifer C.E., *Cauchy's Cours d'analyse: An Annotated Translation*, (2009), Springer, pp. 432. – Available at: https://books.google.com.ua/books?id=M0or-HGe7D0C&pg=PA117&redir_esc=y&hl=uk#v=onepage&q&f=false

[3] наприклад: електрика, магнетизм, оптика, фізика конденсованих станів матерії, аеро- та гідродинаміка, …

Рекомендації автора:

(що ще прочитати, що ще подивитись)

№	**Автор, джерело, *e*-адреса**	**Анотація**
1	Complex Numbers - Introduction to Imaginary Numbers: https://www.youtube.com/watch?v=hqr1DtXXHpY	Ми знаємо, що таке справжні числа. А як щодо уявних чисел або комплексних чисел? Чи існують вони? Хто їх відкрив? Перегляньте це відео, щоб знати відповіді.
2	The Real World Uses of Imaginary Numbers : https://www.youtube.com/watch?v=_h49ilnTmW4	Це відео розповідає про те, як уявні числа використовуються для розв'язання проблем реального світу в математиці, науці та техніці, а також виведення найкрасивішого рівняння в математиці. Основні теми включають сигнали, управління, квантову механіку, електромагнетизм та схеми, але уявні числа мають більше застосувань.
3	L1.3 Necessity of complex numbers : https://www.youtube.com/watch?v=f079K1f2WQk	(MIT OpenCource) MIT – Massachusetts Institute of Technology, штат Массачусетс, США

Джерела:

1. Ball, W.W. Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics*. London: Sterling Publications, 2002.
2. Bittinger M.L., and Ellenbogen D. *Intermediate Algebra: Concepts and Applications*. 6th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing, 2001.
3. Stein S.K. *Mathematics, the Man-Made Universe*. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1969.
4. Jourdain, Philip E.B. “The Nature of Mathematics.” In *The World of Mathematics*, edited by James Newman. New York: Simon and Schuster, 1956.
5. Clark University, Department of Mathematics and Computer Science. “Dave's Short Course on Complex Numbers” <http://www.clarku.edu/~djoyce/complex> (accessed October 7, 2006).
6. Complex number (*from Wikipedia*). URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number

© Чепок А.О. (https://orcid.org/0000-0002-7902-9652), 2020